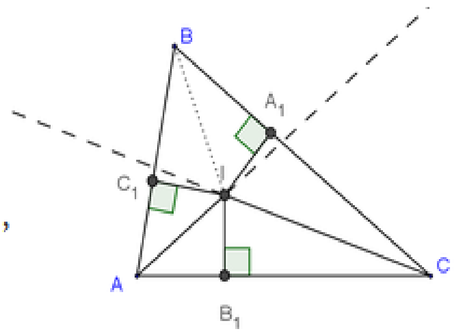
Биссектриса

Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство



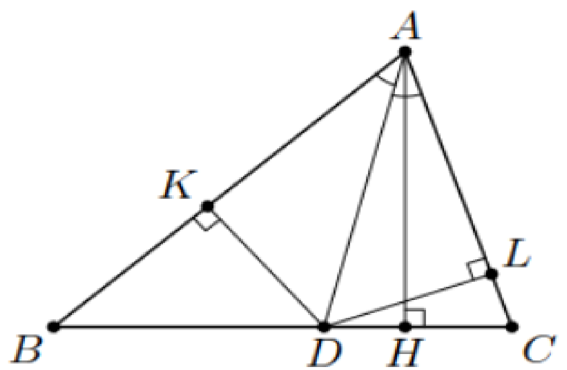
Рассмотрим в треугольнике ABC точку пересечения биссектрисы I углов A и C. Тогда, пользуясь свойством биссектрисы угла, получаем, что точка I равноудалена от сторон AC и AB (то есть $IC_1 = IB_1$, где C_1 и B_1 – основания перпендикуляров из I на стороны AC и AB, см. рисунок). Аналогично точка I равноудалена от сторон CA и CB (то есть $IB_1 = IA_1$, здесь точка A_1 – основание перпендикуляра из I на BC). Значит, точка I равноудалена от сторон CA и CB (так как $IC_1 = IB_1 = IA_1$), то есть лежит на биссектрисе угла B (это мы получаем из другого свойства биссектрисы). То есть все три биссектрисы проходят через одну точку (точку I). Теорема доказана.

Продолжение доказательства

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на два отрезка, длины которых относятся так же, как длины соответствующих сторон

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Тогда нам надо доказать, что $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Пусть AH — высота треугольника ABC, DK и DL — высоты, опущенные из точки D на прямые AB и AC соответственно. Заметим, что $DK = DL$, поскольку D лежит на биссектрисе угла BAC. Обозначим две эти равные высоты через h.



Тогда

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BD \cdot AH}{DC \cdot AH} = \frac{2S_{BAD}}{2S_{CAD}} = \frac{AB \cdot h}{AC \cdot h} = \frac{AB}{AC},$$

что и требовалось доказать.

Также можно было выражать площади треугольников BAD и CAD через две стороны и угол между ними.

Свойство

Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной в этот треугольник окружности

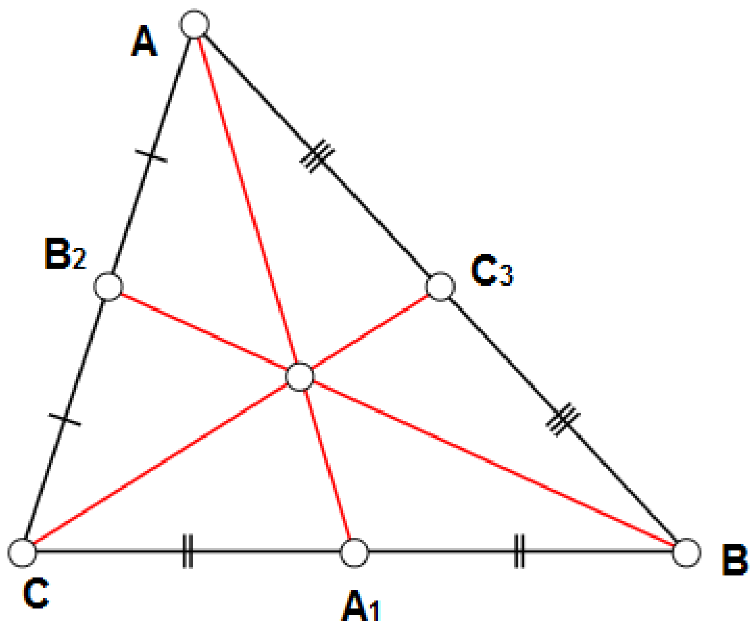
Медиана

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны

Длину медианы m_b, проведенной к стороне СА в треугольнике АВС можно найти по формуле

$$m_b = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - CA^2}}{2}$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.



Пусть на прямых AB, BC, и CA треугольника ABC отмечены точки A_1, C_3, и B_2 соответственно. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_2, CC_3 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AB_2}}{\overrightarrow{B_2C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_3}}{\overrightarrow{C_3A}} = 1.$$

Теорема Удвоение медиан

Пусть в треугольнике ABC Точка B1 является серединой стороны AC. Если отразить точку B симметрично относительно B1 и получить точку D (по сути мы удваиваем медиану BB1), то мы получаем, что четырехугольник   ABCD является параллелограммом.