Основные понятия систем счисления

Системой счисления или нумерацией

называется определенный способ записи чисел. Из Базового курса информатики вы знаете, что системы счисления бывают позиционными и непозиционными.

Вам также известно, что привычная для нас система счисления называется десятичной позиционной системой, что в компьютере для представления чисел и выполнения вычислений используется двоичная система счисления.

Способ кодирования чисел

Числа заключают в себе количественную информацию. Запись чисел по правилам определенной системы счисления есть *способ кодирования чисел*.

От способа кодирования зависит размер кода, т.е. количество цифр в записи числа, а также правила выполнения вычислений.

Одной из главных проблем, которую нужно было решить изобретателям ЭВМ, это проблема представления чисел в памяти компьютера и алгоритма их обработки (вычислений) процессором.

Основные понятия позиционных систем счисления

- *Цифра* – символ, используемый для записи чисел.
- *Алфавит* системы счисления – совокупность всех цифр.
- *Размерность алфавита* – количество цифр в алфавите.

Развернутая форма записи числа

В записи многозначного числа цифры, стоящие в разных позициях, имеют разный *вес*. Так в целом десятичном числе

325

тройка означает три сотни, двойка – два десятка, пятерка - пять единиц:

325=3·100 + 2·10 +5·1.

Такая запись называется ***развернутой формой записи числа***: число записывается в виде суммы, в которой каждое слагаемое – это цифра, умноженная на свой вес.

Разряды числа

В десятичной системе счисления веса равны степеням десятки (положительным и отрицательным). Каждая позиция в записи числа называется *разрядом числа*. Разряды нумеруются в целой части числа положительными целыми числами, начиная от нуля, в дробной части – отрицательными числами, начиная от минус единицы:

число: 6248,547

разряды:	3	2	1	0	-1	-2	-3
число:	6	2	4	8	5	4	7

Базис СС

Следующий, бесконечный в обе стороны ряд целых степеней десятки называется *базисом* десятичной системы счисления:

$\ldots\ 10^9, 10^8, 10^7, 10^6, 10^5, 10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$

Основание системы счисления

Десятичная система относится к числу *традиционных* систем счисления. Для традиционных систем счисления принято размерность алфавита *называть основанием системы счисления*. Основание десятичной системы счисления равно десяти.

По такому же принципу организованы все другие традиционные системы счисления. Наименьшим основанием для позиционной системы является 2 – двоичная система.

Система с основание 1 не может быть позиционной, поскольку для нее невозможно построить базис - единица в любой степени равна единице.

Базис двоичной системы счисления выглядит так:

$$\ldots\ 2^9, 2^8, 2^7, 2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots$$

Основание системы счисления

Если *n* – основание системы не большее десяти, то в алфавите используются *n* первых арабских цифр. Если основание превышает 10, то в качестве дополнительных цифр выступают буквы латинского алфавита по порядку.

Шестнадцатеричная	**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F**

Основание системы счисления

При записи недесятичного числа принято указывать его основание маленькой подстрочной цифрой – нижним индексом. Например: 134_5 – число в пятеричной системе счисления.

Отметим одно очень важное обстоятельство:

в любой позиционной системе счисления ее основание записывается как 10.

Например: $\mathbf{10_2=2}$**,** $\mathbf{10_3=3}$**,** $\mathbf{10_8=8}$**,** $\mathbf{10_{16}=16}$ и т.д.

Задачи

Задача 1. Число в троичной системе счисления: 2011_3 нужно перевести в десятичную систему.

Задача 2. Шестнадцатеричное число $2AF_{16}$ перевести в десятичную систему.

Задача 3. Двоичное число 1010101111_2 перевести в десятичную систему

Перевод чисел в десятичную систему счисления по схеме Горнера

Рассмотрим развернутую запись числа, например, в троичной системе счисления:

$\mathbf{12012_3=1*3^4+2*3^3+0*3^2+1*3^1+2*3^0.}$

В первых четырех слагаемых имеется общий множитель 3, который можно вынести за скобки. Получим

$\mathbf{1*3^4+2*3^3+0*3^2+1*3^1+2*3^0=(1*3^3+2*3^2+0*3^2+1)*3+2.}$

Теперь этот же множитель можно вынести из первых трех слагаемых:

$\mathbf{1*3^4+2*3^3+0*3^2+1*3^1+2*3^0=((1*3^2+2*3^1+0)*3+1)*3+2.}$

И, наконец:

$\mathbf{1*3^4+2*3^3+0*3^2+1*3^1+2*3^0=(((1*3+2)*3+0)*3+1)*3+2.}$

Перевод чисел в десятичную систему счисления по схеме Горнера

Раскройте мысленно скобки в записанном выражении, и вы увидите, что получится то же разложение по базису троичной системы счисления. Но зато скобочное выражение очень просто вычислять. На калькуляторе нужно последовательно слева направо выполнять умножения и сложения. Порядок нажатия клавиш на калькуляторе будет таким:

×	+	×	+	×	+	×	+	=

В рассмотренном примере было выполнено четыре умножения и четыре сложения. Такой способ вычисления называется **схемой Горнера**

Перевод чисел в десятичную систему счисления по схеме Горнера

На основе этой схемы можно вывести следующий алгоритм для перевода целых чисел в десятичную систему счисления:

Старшую цифру умножаем на основание, добавляем вторую цифру, результат умножаем на основание, добавляем третью цифру и так до тех пор, пока не прибавим последнюю цифру.

Результатом будет десятичная запись числа. Ясно, что полученное равенство будет справедливо для любых целых Р-ичных чисел, а формулу можно записать в общем виде:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_{0p} = (\ldots(a_n * p + a_{n-1}) * p + a_{n-2}) * p + \ldots) + a_1) * p + a_0.$$

Эта формула и является иллюстрацией **схемы Горнера** для перевода целых чисел в десятичную систему счисления.

Перевод чисел в десятичную систему счисления по схеме Горнера

$\mathbf{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_{0p} = (\ldots(a_n * p + a_{n-1}) * p + a_{n-2}) * p + \ldots) + a_1) * p + a_0.}$

Из этой формулы следует, что алгебраический многочлен *n*-й степени можно вычислит за *n* операций умножения и *n* операций сложения.

Это самый оптимальный способ вычисления.